平成27年度一般入学試験問題

# 数　　学(理工学部)

(2月9日)

開始時刻　午前10時30分
終了時刻　午後0時00分

## I　注意事項

1. **試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。**
2. 合図があったら、必ず裏面の「II　解答上の注意」をよく読んでから、解答してください。
3. この冊子は6ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
4. **解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。**
   ① **受験番号欄**
   **受験番号を記入**し、さらにその下のマーク欄に**マーク**してください。**正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。**
   ② **氏名欄**
   **氏名**と**フリガナ**を**記入**してください。
5. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ または $\boxed{6}$ を選択してください( $\boxed{5}$ と $\boxed{6}$ の両方を解答した場合は高得点の方を合否判定に使用します)。
6. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

(裏面へ続く)



## II　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{ア}$ 、 $\boxed{イウ}$ などには、特に指示がないかぎり、数字(0～9)または符号(－、±)が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

(例)　$\boxed{アイウ}$ に－83と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | ● | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| イ | － | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ● | 9 |
| ウ | － | ± | 0 | 1 | 2 | ● | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

なお、同一の問題文中に $\boxed{ア}$ 、 $\boxed{イウ}$ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、 $\boxed{ア}$ 、 $\boxed{イウ}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

(例)　$\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| キ | ● | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ク | － | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | ● | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ケ | － | ± | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ● | 6 | 7 | 8 | 9 |

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、$\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$ 、$\dfrac{\sqrt{\boxed{シス}}}{\boxed{セ}}$ に $4\sqrt{2}$、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。また $\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}+\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}$ に $6\sqrt{1+2\sqrt{3}}$ と答えるところを、$3\sqrt{4+8\sqrt{3}}$ のように答えてはいけません。



## 1

(1)　$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}7=0.8451$ として以下の空欄をうめよ。

(a)　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{15}\right)=\boxed{アイ}.\boxed{ウエオカ}$ である。

(b)　$5^{2013}$ は $\boxed{キクケコ}$ 桁の数で最高桁の数字は $\boxed{サ}$ である。

(c)　$10^{0.75}<\boxed{シ}$ ただし、$\boxed{シ}$ はこの条件を満たす最小の整数とする。

(2)　$a$, $b$ を実数とするとき，式 $\boxed{ス}$ ≦ 式 $\boxed{セ}$ ≦ 式 $\boxed{ソ}$ ≦ 式 $\boxed{タ}$ となる。ただし，$a \neq \pm b$ とする。

$|a|-|b|$　　(式1)
$|a|+|b|$　　(式2)
$|a+b|$　　(式3)
$\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$　　(式4)

(3)　$x$ の方程式 $-2x^3-3x^2+12x-a=0$ が3つの異なる実数解をもつ $a$ の範囲は

$\boxed{チツテ}<a<\boxed{ト}$ となる。



## 2

$a_1=0$, $a_2=2$, $4a_{n+2}-3a_{n+1}=3a_{n+1}-2a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ の関係が成り立つ。$a_{n+1}-a_n=b_n$ とすると，$b_1$, $b_3$, $b_5$ の値はそれぞれ，

$\boxed{ア}$ , $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ , $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。また，$a_4$, $a_6$ の値はそれぞれ，$\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ , $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ である。

## 3

1辺の長さが1である正六角形ABCDEFの線分DEの中点をP，$\angle PAB = \theta_1$，$\angle PAF = \theta_2$ とする。

ここで，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とすると

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

となる。

また，$\overrightarrow{AP} = \vec{p}$ とすると

$$\vec{p} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\vec{a} + \boxed{\text{カ}}\,\vec{b}$$

となる。

したがって

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。



## 4

(1)　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ で，$\sin\theta\cos^2\theta$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

このときの $\sin\theta$ は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$，$\cos\theta$ は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2)　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ で，$\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \sqrt{3}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$，

$\sin\theta + \cos\theta$ は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。また，$\tan\theta$ は $\dfrac{\boxed{\text{ス}} + \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。



## 5

点Z$(p,\ 1)$を中心とする円Aが $x$ 軸と $y = \dfrac{1}{2}x^2$ であらわされる放物線Bと接している。円Aと放物線Bの接点をQ$\left(q,\ \dfrac{1}{2}q^2\right)$，$p > 0$，$q > 0$ として以下の問いに答えよ。

(1)　円Aは半径 $\boxed{\text{ア}}$ の円であるから円Aの方程式は

$$(x-p)^2 + \left(y - \boxed{\text{イ}}\right)^2 = \boxed{\text{ウ}}^2$$

である。

つぎに，放物線Bの点Qにおける接線 $l_1$ の方程式は

$$y = qx - \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}q^{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

また，放物線Bの点Qにおける法線 $l_2$ の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{キク}}}{q}x + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}q^{\boxed{\text{サ}}} + \boxed{\text{シ}}$$

である。

(2)　放物線Bの点Qにおける法線 $l_2$ が円Aの中心を通るとき

$$p = \frac{\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}},\quad q = \sqrt{\boxed{\text{タ}}}$$

となる。

また，円Aの中心から $x$ 軸に引いた垂線と $x$ 軸の交点をRとすると，$\angle QZR$ の大きさは $\boxed{\text{チツテ}}^\circ$ である。

$x = 0$ と $x = p$ のあいだにあり，$x$ 軸と円Aと放物線Bに囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{ト}}\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}} - \frac{\pi}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。



## 6

定積分

$$\int_0^{\pi}\left(3x + a\sin x + \frac{\sin 2x}{2}\right)^2 dx$$

の値が最小になる $a$ の値とそのときの定積分の値を求める。

$$f(x) = \left(3x + a\sin x + \frac{\sin 2x}{2}\right)^2$$

とおき展開すると，

$$f(x) = \boxed{\text{ア}}x^2 + \boxed{\text{イ}}ax\sin x + \boxed{\text{ウ}}x\sin 2x + a^2\sin^2 x + \frac{\sin^2 2x}{\boxed{\text{エ}}} + a\sin x\sin 2x$$

となる。

このとき，

$$\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}},$$

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \pi,$$

$$\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx = \boxed{\text{キ}}\frac{\pi}{\boxed{\text{ク}}},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}},$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 2x\,dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{コ}}},$$

$$\int_0^{\pi} \sin x\sin 2x\,dx = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\int_0^{\pi}\left(\cos x - \cos\boxed{\text{ス}}x\right)dx = \boxed{\text{セ}}$$

より，定積分は

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}}}a^2 + \boxed{\text{タ}}\pi a + \boxed{\text{チ}}\pi^3 - \frac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}}\pi$$

となる。この定積分の値が最小となる $a$ の値は $\boxed{\text{ナニ}}$，定積分の値は

$$\boxed{\text{ヌ}}\pi^{\boxed{\text{ネ}}} - \frac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\pi$$

である。