数　　学

1　放物線 $y=-3x^2+12x$ 上に点 $P(t,\ -3t^2+12t)$ をとり，4点 A(0, 4)，B(0, 9)，C(4, 9)，D(4, 4) に対して，△PAD の内部と長方形 ABCD の内部の共通部分を考える。ただし，$\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{7}{2}$ とする。

(1)　点 P が長方形 ABCD の内部または周上にあるのは

$$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \leqq t \leqq \boxed{ウ},\quad \boxed{エ} \leqq t \leqq \frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

のときである。

(2)　このとき△PAD は長方形 ABCD の内部に含まれるので，共通部分の面積は

$$\boxed{キク}\,t^2+\boxed{ケコ}\,t-\boxed{サ}$$

である。

(3)　一方，$\boxed{ウ} < t < \boxed{エ}$ のとき，点 P は長方形 ABCD の辺 BC より上にあるので，△PAD の内部と長方形 ABCD の内部の共通部分は台形となる。この台形の下底の長さは 4，高さは 5 で固定されているから，上底の長さが最大となるとき，すなわち $t=\boxed{シ}$ のとき，この台形の面積は最大となる。

このときの上底の長さは $\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ で，台形の面積は $\frac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$ である。

2　a を実数の定数として，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+8x+a$ を考える。

(1)　関数 $f(x)$ の導関数は $f'(x)=\boxed{ア}\,x^2-\boxed{イ}\,ax+\boxed{ウ}$ である。

(2)　この関数が極大値と極小値を両方ともつための必要十分条件は，$a^2>\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。

(3)　極大値と極小値を与える x をそれぞれ α，β とおくと，$\alpha+\beta=\boxed{カ}\,a$，$\alpha\beta=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。これらを用いることにより，極大値と極小値の和は

$$f(\alpha)+f(\beta)=\boxed{ケコ}\,a^3+\boxed{サシ}\,a$$

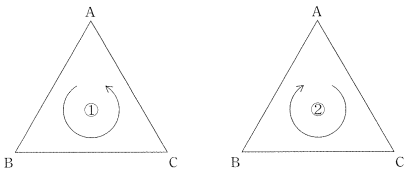
となる。

(4)　$f(\alpha)+f(\beta)=4$ となる a の値は

$$a=\boxed{ス},\ \frac{\boxed{セソ}-\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$$

である。

3　1辺の長さが1の正三角形 ABC がある。点 A から出発して，コインを投げて表が出たら図の①の方向に長さ1だけ，裏が出たら反対に②の方向に長さ1だけ，正三角形 ABC の周上を移動する。コインは全部で5回投げるものとし，それぞれの回において，表と裏の出る確率はともに $\frac{1}{2}$ であるとする。



(1)　①の方向に2回，②の方向に3回移動する確率は $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。

(2)　5回動かしたあと点 A の位置にいる確率は $\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}$ である。

(3)　5回動かしたあと点 B の位置にいる確率は $\frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコ}}$ である。

(4)　5回動かす間に一度も点 A の位置に戻らない確率は $\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$ である。

4　初項が -13，公差が7である等差数列 $\{a_n\}$ と，初項が21，公差が4である等差数列 $\{b_n\}$ を考える。

(1)　$a_5=\boxed{アイ}$，$b_3=\boxed{ウエ}$ である。

(2)　$a_n>b_n$ となる最小の自然数 n は $\boxed{オカ}$ である。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の最初の n 項の和を S_n，数列 $\{b_n\}$ の最初の n 項の和を T_n で表すとき，$S_n>T_n$ となる最小の自然数 n は $\boxed{キク}$ である。

(4)　2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通して含まれる項を小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n=\boxed{ケコ}\,n+\boxed{サ}$ である。