平 成 31 年 度 全 学 統 一 入 学 試 験 問 題

数　　　学（理工学部）

（２月３日）

開始時刻　　午後１時 00 分
終了時刻　　午後２時 00 分

Ⅰ　注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 合図があったら、必ず裏面の「Ⅱ　**解答上の注意**」をよく読んでから、解答してください。
3. この冊子は５ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
4. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

   ①　受験番号欄

   受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

   ②　氏名欄

   氏名とフリガナを記入してください。
5. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ または $\boxed{5}$ を選択してください。

   （$\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の両方を解答した場合は高得点の方を合否判定に使用します。）
6. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

（裏面へ続く）

Ⅱ　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字（0～9）または符号（－、±）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

（例） $\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9
ウ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、 $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は、既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

（例） $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\dfrac{-4}{5}$ として

エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	－	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
カ	－	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、 $\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。

$\boxed{1}$ 以下の各問いに答えよ。

(1) 実数 x，y が $4x^2+y^2=1$ を満たしているとき，y^2-4x の最大値は $\boxed{\text{ア}}$，最小値は $\boxed{\text{イウ}}$ である。

(2) 特定の生徒A，Bを含む8人の生徒を3人，3人，2人の3組に分ける。AとBが同じ組に入る分け方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りである。

(3) 整式 $P(x)$ を x^2-1 で割ったときの余りが $2x+6$，x^2-4 で割ったときの余りが $-x+3$ であるとき，$P(x)$ を x^2-x-2 で割ったときの余りは $\boxed{\text{カ}}\,x+\boxed{\text{キ}}$ である。

(4) xy 平面上で，中心が直線 $y=-2x+3$ 上にあり，x 軸，y 軸の両方に接する円は二つあり，それらの方程式は，$(x-\boxed{\text{ク}})^2+(y-\boxed{\text{ケ}})^2=\boxed{\text{コ}}$，$(x-\boxed{\text{サ}})^2+(y+\boxed{\text{シ}})^2=\boxed{\text{ス}}$ である。

(5) $x<0$，$2^x+2^{-x}=7$ であるとき，$4^x+4^{-x}=\boxed{\text{セソ}}$，$2^x-2^{-x}=\boxed{\text{タチ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

2 数直線上の点 P を次の操作によって動かす。

さいころを 1 回投げて，1，2，3 の目が出たら，点 P を数直線の正の方向に 1 動かす。

4，5 の目が出たら，点 P を数直線の正の方向に 2 動かす。

6 の目が出たら，点 P を原点に戻す。

ただし，点 P は最初に原点にあるものとし，点 P が原点にあるときに 6 の目が出た場合は点 P は原点から動かさないものとする。

この操作を n 回行ったときの点 P の座標を p_n とするとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $p_2=3$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$p_2=4$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$，$p_2=0$ となる確率は $\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

(2) $p_3=5$ となる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$，$p_3=0$ となる確率は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$，$p_3=1$ となる確率は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$ である。

(3) $p_4=2$ となる確率は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソタ}}$，$p_4=2$ であるとき $p_2 \geqq 3$ である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}}$ である。

$\boxed{3}$ AB = 1, AC = 2 である三角形 ABC があり，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とし，$\vec{b} \cdot \vec{c} = m$ とおくとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $m = \boxed{ア} \cos\angle \mathrm{A}$ であるから，m のとりうる値の範囲は $\boxed{イウ} < m < \boxed{エ}$ である。

(2) BD : DC = 1 : $\boxed{オ}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\vec{b} + \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\vec{c}$$

である。

(3) 直線 AD 上に点 P をとると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$(ただし，$t$ は実数)と表すことができる。このことから，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \left(\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}t - \boxed{コ}\right)\vec{b} + \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}t\,\vec{c}$$

となる。

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$ を m，t を用いて表すと，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2 = \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}(m + \boxed{ス})t^2 - \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}(m + \boxed{ス})t + \boxed{タ}$$
$$= \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}(m + \boxed{ス})\left(t - \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\right)^2 + \frac{\boxed{テ} - m}{\boxed{ト}}$$

となる。

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2$ が最小となるような点 P は，線分 AD を $\boxed{ナ}$: 1 の比に内分する点である。

(4) 点 B を中心とする半径 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の円と直線 AD が異なる 2 点で交わるような m の値の範囲は，

$\boxed{ニヌ} < m < \boxed{ネ}$ である。

$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ のうちどちらか一方を選択して解答せよ。

$\boxed{4}$　$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = 2(3\sin x + \cos x)(4\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 1)$$

で定める。また，$t = 3\sin x + \cos x$ とおく。以下の各問いに答えよ。

(1)　t^2 を計算すると，

$$t^2 = \boxed{\text{ア}}\sin^2 x + \boxed{\text{イ}}\sin x\cos x + \boxed{\text{ウ}}$$

となる。

これより，$f(x)$ を t の式で表すと，

$$f(x) = t^{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}}\,t$$

となる。

(2)　$t = 3\sin x + \cos x$ を，正の実数 r と，$-\pi < \alpha \leqq \pi$ を満たす実数 α を用いて，

$$t = r\sin(x + \alpha)$$

と表すと，$r = \sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$，$\sin\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}$，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}$ である。

また，x が $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲を動くときの t のとりうる値の範囲は，$\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の選択肢から一つ選べ。

$\boxed{\text{コ}}$ の選択肢

⓪　$0 \leqq t \leqq 1$　　①　$0 \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$

②　$-1 \leqq t \leqq 1$　　③　$-\sqrt{\boxed{\text{カキ}}} \leqq t \leqq \sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$

(3)　t の関数 $g(t)$ を，

$$g(t) = t^{\boxed{\text{エ}}} - \boxed{\text{オ}}\,t$$

で定めると，

$$g'(t) = \boxed{\text{サ}}(t + \boxed{\text{シ}})(t - \boxed{\text{ス}})$$

となる。

このことから，x が $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値は $\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソタ}}}$ となる。

5 $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = 3\sin x\cos x + 4\sin x + x$$

で定める。以下の各問いに答えよ。

(1) $f'(x) = \boxed{ア}\left(\boxed{イ}\cos x - 1\right)\left(\cos x + \boxed{ウ}\right)$

であるから，$f'(x) = 0$ を満たす x の値が $0 < x < \pi$ の範囲にただ1つ存在する。

この値を α とすると，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$，$\sin\alpha = \dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である。

また，$f(\alpha)$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の $\boxed{ケ}$ である。

$\boxed{ケ}$ に当てはまるものを，下の選択肢から一つ選べ。

$\boxed{ケ}$ の選択肢

⓪ 極大値　　　① 極小値

(2) $f''(x) = \boxed{コサ}\sin x\left(\boxed{シ}\cos x + 1\right)$

であるから，曲線 $y = f(x)\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ はただ1つの変曲点をもつ。

この変曲点の x 座標を β とすると，$\cos\beta = \dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}}$，$\sin\beta = \dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$ である。

(3) (1)で定めた α，(2)で定めた β に対して，2点A，BをA$(\alpha, f(\alpha))$，B$(\beta, f(\beta))$ と定める。

さらに，線分ABの中点をMとする。

このとき，Mの y 座標は $\dfrac{\boxed{テ}\sqrt{\boxed{ト}}}{\boxed{ナ}} + \dfrac{\pi}{\boxed{ニ}}$ である。