

2020年度全学統一入学試験問題

数 学(理工学部)

(2月3日)

開始時刻 午後1時00分

終了時刻 午後2時00分

I 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 合図があったら、必ず裏面の「Ⅱ 解答上の注意」をよく読んでから、解答してください。
3. この冊子は5ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
4. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

① 受験番号欄

受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

② 氏名欄

氏名とフリガナを記入してください。

5. ☐ 1 ~ ☐ 3 と ☐ 4 または ☐ 5 を選択してください。

(☐ 4 と ☐ 5 の両方を解答した場合は
高得点の方を合否判定に使用します。)

6. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。

7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

(裏面へ続く)

II 解答上の注意

- 問題の文中の ア、イウ などには、特に指示がないかぎり、数字(0～9)または符号(－、±)が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

(例) アイウ に－83 と答えたいとき

ア	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

なお、同一の問題文中に ア、イウ などが2度以上現れる場合、2度目以降は、ア、イウ のように細字で表記します。

- 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

(例) $\frac{\text{エオ}}{\text{カ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $-\frac{4}{5}$ として

エ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
カ	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

- 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $\sqrt{\text{キク}}$ 、 $\frac{\sqrt{\text{ケコ}}}{\text{サ}}$ に $4\sqrt{2}$ 、 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、 $2\sqrt{8}$ 、

$\frac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。

1 以下の各問いに答えよ。

(1) $2x^3 + 4x^2y + x^2z - 30xyz + 2xyz - 15y^2z$ を因数分解すると、

$$(x - \boxed{\text{ア}}y)(x + \boxed{\text{イ}}y)(\boxed{\text{ウ}}x + z)$$

となる。

(2) 2つの自然数 a, b の最大公約数が6で、 $3a + 2b = 96$ であるとき、 $(a, b) = (\boxed{\text{エオ}},$

$\boxed{\text{カキ}})$ である。

(3) 5個の値からなる次のようなデータがある。

$$19, 25, x, 22, y \quad (\text{ただし, } x \leq y)$$

このデータの平均値が21、分散が6であるとき、 $(x, y) = (\boxed{\text{クケ}}, \boxed{\text{コサ}})$ である。

(4) $0 \leq \theta \leq \pi$ とするとき、等式

$$\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 \theta} + (\sqrt{3} - 1)\tan \theta = \sqrt{3} + 1$$

を満たす θ の値は、 $\frac{\pi}{\boxed{\text{シ}}}, \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \pi$ である。

(5) $\log_2 3 = a, \log_9 10 = b$ とするとき、 $\log_2 5, \log_{80} 81$ を a, b を用いて表すと、

$$\log_2 5 = \boxed{\text{ソ}}ab - \boxed{\text{タ}}, \log_{80} 81 = \frac{\boxed{\text{チ}}a}{\boxed{\text{ツ}}ab + \boxed{\text{テ}}}$$

である。

ただし、 $\boxed{\text{チ}} \boxed{\text{ツ}} \boxed{\text{テ}}$ の最大公約数は1であるとする。

2 数字 0 が書かれた球が 4 個と、数字 1 が書かれた球、数字 2 が書かれた球、数字 3 が書かれた球、数字 4 が書かれた球がそれぞれ 1 個ずつ、合計 8 個の球がある。ただし、0 が書かれた球については、互いに区別がつかないものとする。

このとき、以下の各問いに答えよ。

(1) 8 個の球を 4 個ずつ A, B の 2 人に配る。

(i) 0 が書かれた球が A, B に 2 個ずつ配られる場合の数は、**ア** 通りである。

(ii) 配り方の総数は、**イウ** 通りである。

(2) 8 個の球を、個数は定めずに、A, B の 2 人に配る。ただし、2 人とも少なくとも 1 個の球が配られるものとする。

(i) 0 が書かれた球が A に 3 個、B に 1 個配られる場合の数は、**エオ** 通りである。

(ii) 0 が書かれた球が A に 4 個配られる場合の数は、**カキ** 通りである。

(iii) 配り方の総数は、**クケ** 通りである。

(3) 8 個の球を 2 個ずつ A, B, C, D の 4 人に配る。

(i) 0 が書かれた球が 4 人に 1 個ずつ配られる場合の数は、**コサ** 通りである。

(ii) 0 が書かれた球が 4 人のうち 2 人に 2 個ずつ配られる場合の数は、**シス** 通りである。

(iii) 配り方の総数は、**セソタ** 通りである。

3 b を負でない実数とし, xyz 空間内の 2 定点 $A(0, 0, 2)$, $B(0, b, 0)$ および動点 P を考える。

ここで, 点 P は次の 2 つの条件(i), (ii)を満たしながら動くものとする。

(i) 2 直線 AB , AP のなす角の一つは $\frac{\pi}{6}$ である。

(ii) 点 P は xy 平面上にある。

このとき, 以下の各問いに答えよ。

(1) (i)より 2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると, $\theta = \frac{\pi}{6}$ また

は $\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \pi$ であるから,

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP})^2 = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} |\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AP}|^2 \dots\dots ①$$

が成り立つ。

(2) $\overrightarrow{AB} = (0, b, \boxed{\text{オカ}})$ であり, (ii)より $P(x, y, 0)$ とおくことができるため, $\overrightarrow{AP} = (x, y, \boxed{\text{オカ}})$ と表すことができる。これらより,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = by + \boxed{\text{キ}} \\ |\overrightarrow{AB}|^2 = b^2 + \boxed{\text{ク}} \\ |\overrightarrow{AP}|^2 = x^2 + y^2 + \boxed{\text{ク}} \end{cases} \dots\dots ②$$

となるため, ①に②を代入して整理すると, x, y の方程式

$$3(b^2 + \boxed{\text{ク}})x^2 + (\boxed{\text{ケコ}} - b^2)y^2 - \boxed{\text{サシ}}by + \boxed{\text{スセ}}b^2 - 16 = 0$$

が得られる。

(3) (2)の結果より, $b = 0$ のとき点 P が描く図形は, 原点を中心とする半径が $\frac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ の

xy 平面上の円である。また, $b = \boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ のとき点 P が描く図形は, y 軸を対称軸とする xy 平面上の放物線であり, その方程式は,

$$y = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}x^2 + \frac{\boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} \quad \text{かつ} \quad z = 0$$

である。

4, 5 のうちどちらか一方を選択して解答せよ。

- 4 t を正の数とし, xy 平面上の曲線 $C_1: y = x^3 - x$ を x 軸方向に t , y 軸方向に t だけ平行移動した曲線を C_2 とする。また, C_1 と C_2 は異なる 2 点で交わるものとする。
このとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1) C_2 の方程式は

$$y = x^3 - \boxed{\text{ア}} tx^2 + (\boxed{\text{イ}} t^2 - \boxed{\text{ウ}})x - t^3 + \boxed{\text{エ}} t$$

である。

- (2) C_1 と C_2 の 2 つの交点の x 座標を α , β (ただし, $\alpha < \beta$) とするとき, α , β は x の 2 次方程式

$$\boxed{\text{オ}} x^2 - \boxed{\text{カ}} tx + t^2 - \boxed{\text{キ}} = 0$$

の異なる 2 つの実数解となる。

このことから, t のとりうる値の範囲は, $0 < t < \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ となる。

さらに, $(\beta - \alpha)^2$ を t を用いて表すと, $(\beta - \alpha)^2 = \frac{-t^2 + \boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ となる。

- (3) C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を S とおくと, S は t を用いて,

$$S = \frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}} t(-t^2 + \boxed{\text{コ}})^{\frac{3}{2}}$$

と表すことができる。

さらに, $t^{\frac{2}{3}} = u$ とおくと,

$$S = \frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{スセ}}} (-u^{\boxed{\text{ヅ}} + \boxed{\text{タ}} u)^{\frac{3}{2}}$$

となる。

これより, S は $t = \sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{ツ}}$ をとることがわかる。

5 xy 平面上の 2 つの曲線 $C_1: y = \frac{1}{x-2} (x > 2)$, $C_2: y = \frac{1}{x+2} (x > -2)$ について考える。

以下の各問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 について, $y = \frac{1}{x-2}$ より, その導関数は

$$y' = - \frac{\boxed{\text{ア}}}{(x-2)\boxed{\text{イ}}}$$

であるから, 曲線 C_1 上の点 $\left(t, \frac{1}{t-2}\right) (t > 2)$ における C_1 の接線を l とすると, l の方程式は,

$$y = - \frac{\boxed{\text{ア}}}{(t-2)\boxed{\text{イ}}} x + \frac{\boxed{\text{ウ}} t - \boxed{\text{エ}}}{(t-2)\boxed{\text{イ}}}$$

となる。

(2) (1)で定めた接線 l と曲線 C_2 は異なる 2 点で交わる。

その x 座標を α , β (ただし, $\alpha < \beta$) とするとき, α , β は x の 2 次方程式

$$x^2 - (\boxed{\text{オ}} t - \boxed{\text{カ}}) x + t^2 - \boxed{\text{キ}} t + \boxed{\text{ク}} = 0$$

の異なる 2 つの実数解となる。

さらに, $(\beta - \alpha)^2$ を t を用いて表すと, $(\beta - \alpha)^2 = \boxed{\text{ケコ}} (t - \boxed{\text{サ}})$ となる。

(3) (2)で定めた α , β について, 曲線 C_2 , 2 直線 $x = \alpha$, $x = \beta$ および x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を V とするとき,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi(\beta - \alpha)}{\alpha\beta + \boxed{\text{シ}}(\alpha + \beta) + \boxed{\text{ス}}} \\ &= \frac{\boxed{\text{セ}} \pi \sqrt{t - \boxed{\text{サ}}}}{(t - \boxed{\text{ソ}})\boxed{\text{タ}}} \end{aligned}$$

となる。

したがって, 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^p V$ が 0 でない有限の値となるような定数 p の値は, $p = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ で

あり, このとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^p V = \boxed{\text{テ}} \pi$$

である。