2 0 2 1 年 度 一 般 入 試 B 入 学 試 験 問 題

数　　　学【理工学部】

（2月3日）

開始時刻　　午前10時30分
終了時刻　　午前11時40分

Ⅰ 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 合図があったら、必ず裏面の「Ⅱ　**解答上の注意**」をよく読んでから、解答してください。
3. この冊子は５ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
4. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

   ①　受験番号欄

   受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

   ②　氏名欄

   氏名とフリガナを記入してください。
5. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ または $\boxed{5}$ を選択してください。
（ $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の両方を解答した場合は高得点の方を合否判定に使用します。）
6. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

（裏面へ続く）

Ⅱ　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字（０～９）または符号（－、±）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

（例） $\boxed{\text{アイウ}}$ に－83と答えたいとき

ア	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	－	±	0	1	2	3	4	5	6	7	●	9
ウ	－	±	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9

なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ などが２度以上現れる場合、２度目以降は、$\boxed{\text{ア}}$ 、 $\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

（例） $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\dfrac{-4}{5}$ として

エ	●	±	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	－	±	0	1	2	3	●	5	6	7	8	9
カ	－	±	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、 $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$ 、 $\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。

$\boxed{1}$ 以下の各問いに答えよ。

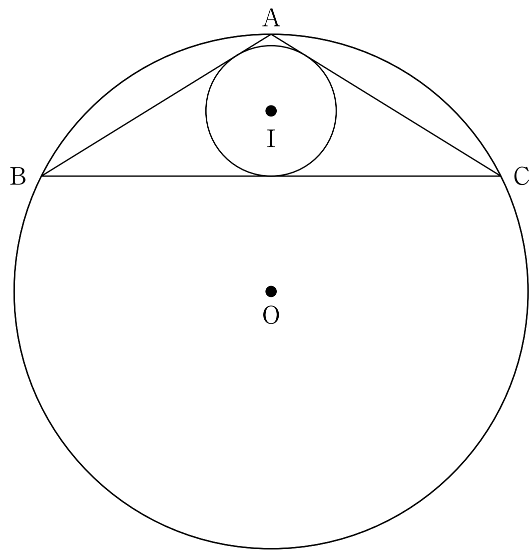
(1) 次の値を求めよ。

(i) $4^{-\log_2 7}$

(ii) $\log_{27} 243$

(2) p, q を実数とする。3次方程式 $x^3-3x^2-px+3=0$ と2次方程式 $x^2+2x-q=0$ が異なる2つの共通した実数解をもつとき，p と q の値を求めよ。

(3) 次の図において，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=4$，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心 O と内心 I に対して，線分 AO と線分 AI の長さを求めよ。

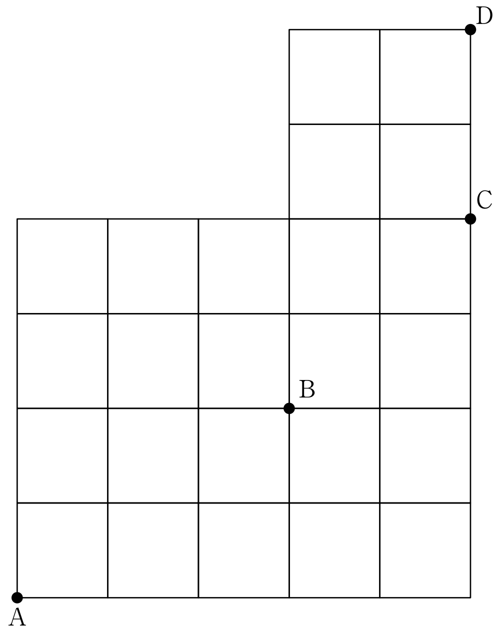


$\boxed{2}$ 下の図において，

(1) A 地点から C 地点まで最短距離で行く道順は全部で $\boxed{アイウ}$ 通りある。

(2) A 地点から C 地点まで最短距離で行く道順のうち，B 地点を通る道順は全部で $\boxed{エオ}$ 通りある。

(3) A 地点から D 地点まで最短距離で行く道順は全部で $\boxed{カキク}$ 通りある。



3 以下の各問いに答えよ。

(1) 座標空間の3点 A$(2,\ 1,\ 2)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，P$(0,\ -1,\ -1)$について，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きであり，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 1$ となる点 Q を考える。

このとき，

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \boxed{\text{ア}}$，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(\frac{\boxed{\text{イウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\ \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}},\ \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \right)$$

であるので，点 Q の座標は

$$\mathrm{Q}\left(\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}},\ \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \right)$$

である。

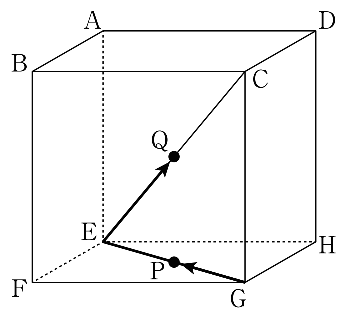
(2) 1辺の長さが2である立方体 ABCD-EFGH において，

動点 P は点 G を出発し，点 E の方向に線分 GE 上を秒速 $\sqrt{2}$ で動き，

動点 Q は点 E を出発し，点 C の方向に線分 EC 上を秒速 $\sqrt{3}$ で動くとする。

$0 < t < 2$ とする。動点 P，Q が同時に出発して t 秒後の線分 GP と線分 EP の長さは，

$$\mathrm{GP} = \sqrt{\boxed{\text{テ}}}\ t,\ \ \mathrm{EP} = (\boxed{\text{ト}} - t)\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}$$



である。また，$\cos\angle\mathrm{CEG} = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であるので，

$$\mathrm{PQ}^2 = \boxed{\text{ネ}}\left(t - \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \right)^2 + \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$$

である。よって，線分 PQ の長さは，動点 P，Q が同時に出発してから $\dfrac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ 秒後に最小となる。

$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ のうちどちらか一方を選択して解答せよ。

$\boxed{4}$　1から9までの数字が書かれたカードを並べて，3桁や4桁，5桁の整数を作ることを考える。ただし，同じ数字のカードを何枚用いてもよいものとする。

(1)　赤いさいころと青いさいころを同時に投げて，赤いさいころの出た目をa，青いさいころの出た目をbとおく。このとき，

(i)　3桁の整数 $\boxed{a}\boxed{1}\boxed{b}$ が偶数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii)　4桁の整数 $\boxed{1}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{4}$ が3の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(iii)　4桁の整数 $\boxed{2}\boxed{5}\boxed{a}\boxed{b}$ が4の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(iv)　4桁の整数 $\boxed{a}\boxed{3}\boxed{7}\boxed{b}$ が6の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(2)　赤，黄，青3個のさいころを同時に投げて，赤いさいころの出た目をa，黄色いさいころの出た目をb，青いさいころの出た目をcとおく。このとき，

(i)　5桁の整数 $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{8}\boxed{c}\boxed{9}$ が9の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(ii)　5桁の整数 $\boxed{2}\boxed{a}\boxed{6}\boxed{b}\boxed{c}$ が12の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。

5 p と q を正の実数とする。xy 平面上で，放物線 $C : y = 10 - x^2$ を，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して得られる放物線 C' が，C の頂点($\boxed{ア}$ ， $\boxed{イウ}$)を通るとする。

このとき，$q = p^{\boxed{エ}}$ であり，C' の方程式は，

$$C' : y = \boxed{オカ} - x^2 + \boxed{キ}\,px$$

となる。

また，C 上の点$(-1,\ 9)$における接線 l の方程式は，

$$l : y = \boxed{ク}\,x + \boxed{ケコ}$$

であるので，放物線 C' と直線 l が異なる 2 つの共有点をもつための必要十分条件は，

$$p > \boxed{サ}$$

である。

さらに，$p = \boxed{サ} + 1$ のとき，放物線 C' と直線 l の異なる 2 つの共有点の x 座標はそれぞれ，

$$\alpha = \boxed{シ} + \sqrt{\boxed{ス}}, \quad \beta = \boxed{シ} - \sqrt{\boxed{ス}}$$

であり，

$$\alpha - \beta = \boxed{セ}\sqrt{\boxed{ス}}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = \boxed{ソ}\sqrt{\boxed{ス}}, \quad \alpha^3 - \beta^3 = \boxed{タチ}\sqrt{\boxed{ス}},$$

$$\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = \boxed{ツテト}\sqrt{\boxed{ス}},$$

$$\alpha^5 - \beta^5 = (\alpha + \beta)(\alpha^4 - \beta^4) - \alpha\beta(\alpha^3 - \beta^3) = \boxed{ナニヌ}\sqrt{\boxed{ス}}$$

であるので，放物線 C' と直線 l で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\dfrac{\boxed{ネノハ}\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{ヒ}}\pi$ である。