２０２１年度一般入試Ｃ入学試験問題

数　　学（理工学部）

（２月８日）

開始時刻　　午後１時 00 分

終了時刻　　午後２時 00 分

Ⅰ　注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 合図があったら、必ず裏面の「Ⅱ　**解答上の注意**」をよく読んでから、解答してください。
3. この冊子は５ページです。落丁、乱丁、印刷の不鮮明及び解答用紙の汚れなどがあった場合には申し出てください。
4. 解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので、監督者の指示に従って、それぞれ正しく記入し、マークしてください。

   ①　受験番号欄

   受験番号を記入し、さらにその下のマーク欄にマークしてください。正しくマークされていない場合は、採点できないことがあります。

   ②　氏名欄

   氏名とフリガナを記入してください。
5. $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ または $\boxed{5}$ を選択してください。

   （ $\boxed{4}$ と $\boxed{5}$ の両方を解答した場合は高得点の方を合否判定に使用します。）
6. 問題冊子の余白等は適宜利用してもかまいません。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

（裏面へ続く）

Ⅱ　解答上の注意

1. 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示がないかぎり、数字（０～９）または符号（－、±）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

　（例）$\boxed{\text{アイウ}}$ に－83 と答えたいとき

ア	**⊖**	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
イ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	**⑧**	⑨
ウ	⊖	⊕	⓪	①	②	**③**	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

　なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ などが２度以上現れる場合、２度目以降は、$\boxed{\text{ア}}$ 、$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

2. 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

　（例）$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として

エ	**⊖**	⊕	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
オ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	**④**	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
カ	⊖	⊕	⓪	①	②	③	④	**⑤**	⑥	⑦	⑧	⑨

3. 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

　例えば、$\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ 、$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ に $4\sqrt{2}$ 、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$ 、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$ のように答えてはいけません。

$\boxed{1}$ 以下の各問いに答えよ。

(1) $x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ のとき，

$x^2 - 5x = \boxed{\text{アイ}}$

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \boxed{\text{ウ}}$

である。

(2) AB = 5，BC = 7，CA = 9 である三角形 ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，

$$\mathrm{BD} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}，\ \cos\angle\mathrm{ABC} = -\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}，\ \mathrm{AD} = \frac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

(3) $(x+1)^4$ を展開すると，

$(x+1)^4 = x^4 + \boxed{\text{ス}}\,x^3 + \boxed{\text{セ}}\,x^2 + \boxed{\text{ス}}\,x + 1$

である。

このことから，9^4 を 8 進法で表すと，$\boxed{\text{ソタチツテ}}_{(8)}$ である。

(4) xy 平面上の円 $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 10 = 0$ の中心の座標は $(\boxed{\text{ト}}，\boxed{\text{ナ}})$，半径は $\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}$ であり，この円が直線 $y = -\dfrac{1}{3}x$ から切り取る線分の長さは $\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

(5) x と y についての連立方程式

$$\begin{cases} 4^x = 2^{y+1} & \cdots\cdots① \\ \log_3(x-2) = \log_9 y & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を考える。

方程式①から y を x を用いて表すと，

$y = \boxed{\text{ハ}}\,x - \boxed{\text{ヒ}}$

であり，これと方程式②から，連立方程式の解は，

$(x,\ y) = (\boxed{\text{フ}}，\boxed{\text{ヘ}})$

となる。

$\boxed{2}$ 箱の中に，0と書かれた玉が1個，1と書かれた玉が1個，2と書かれた玉が1個，合計3個の玉が入っている。

この中から1個の玉を無作為に取り出し，玉に書かれた数を記録して箱に戻すという操作を n 回繰り返すとき，記録された n 個の数の和を S_n とする。ただし，n は自然数であるとし，各回の操作において，どの玉が取り出される確率も同様に等しいものとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n = 4$ の場合を考える。

$S_4 = 7$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$，

$S_4 = 6$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$，

$S_4 = 5$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$

である。

また，0と書かれた玉が少なくとも1回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

さらに，0と書かれた玉が少なくとも1回取り出されるとき，$S_4 \geqq 5$ である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

(2) 自然数 n に対して，S_n が偶数となる確率を p_n とおく。

このとき，S_{n+1} が偶数となるための条件は，

S_n が偶数であり，$(n+1)$回目の操作で0または2と書かれた玉を取り出す

または，S_n が奇数であり，$(n+1)$回目の操作で1と書かれた玉を取り出す

ことである。ただし，0は偶数とする。

このことから，

$$p_1 = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}},\quad p_{n+1} = \frac{1}{\boxed{\text{ニ}}}p_n + \frac{1}{\boxed{\text{ヌ}}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことがわかる。

これより，

$$p_n = \boxed{\text{ネ}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が得られる。

【$\boxed{\text{ネ}}$ の選択肢】

⓪ $\dfrac{n}{3}$　① $\dfrac{n+1}{3}$　② $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$　③ $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

④ $\dfrac{n+1}{3^n}$　⑤ $\dfrac{3n-1}{3^n}$　⑥ $\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$　⑦ $\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

3 座標空間内に4点P$(-1,\ 3,\ 3)$，A$(3,\ -2,\ 1)$，B$(5,\ 0,\ 0)$，C$(-3,\ -2,\ -2)$をとる。また，3点A，B，Cを通る平面をαとし，点Pから平面αに下ろした垂線とαの交点をHとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$の成分を求めると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\boxed{ア},\ \boxed{イ},\ \boxed{ウエ})$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (\boxed{オカ},\ \boxed{キ},\ \boxed{クケ})$

である。

(2) 点Hが平面α上にあることから，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$は実数$s$，$t$を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

と表すことができる。

このことから，

$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} = (\boxed{コ}s - \boxed{サ}t + \boxed{シ},\ \boxed{ス}s - \boxed{セ},\ -s - \boxed{ソ}t - \boxed{タ})$

となる。

さらに，直線PHと平面αが垂直であることから，実数s，tの値が求められる。これを用いると，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$は

$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = (\boxed{チ},\ \boxed{ツテ},\ \boxed{トナ})$

と定まる。

(3) (1)，(2)の結果から，

三角形ABCの面積は $\boxed{ニ}$

四面体PABCの体積は $\boxed{ヌネ}$

となる。

$\boxed{4}$, $\boxed{5}$ **のうちどちらか一方を選択して解答せよ。**

$\boxed{4}$ xy 平面上の放物線 $C : y = x^2 - 6x + 10$ について考える。また，a は正の定数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) C の頂点の座標は($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$)である。

(2) C と x 軸，y 軸，直線 $x = a$ で囲まれる部分の面積を S とする。

a を用いて S を表すと，

$$S = \frac{a^3}{\boxed{\text{ウ}}} - \boxed{\text{エ}}\,a^2 + \boxed{\text{オカ}}\,a$$

となる。

(3) C と x 軸，直線 $x = a$，直線 $x = 2a$ で囲まれる部分の面積を T とする。

a を用いて T を表すと，

$$T = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\,a^3 - \boxed{\text{ケ}}\,a^2 + \boxed{\text{コサ}}\,a$$

となる。

(4) (2)，(3)で求めた S，T をそれぞれ a の関数とみると，$a > 0$ の範囲において，

S は $\boxed{\text{シ}}$ 。

T は $\boxed{\text{ス}}$ 。

【 $\boxed{\text{シ}}$ ， $\boxed{\text{ス}}$ の選択肢】

⓪ 単調に増加する

① 単調に減少する

② 極大値をもつが極小値をもたない

③ 極小値をもつが極大値をもたない

④ 極大値と極小値をともにもつ

また，$S = T$ となる a の値は，

$a = \boxed{\text{セ}}$

である。

5 関数$f(x) = (3x + 1)e^{-x} + 2$について考える。ただし，$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$であることを用いてもよい。また，$e$は自然対数の底とする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \boxed{ア}$である。

(2) $f(x)$の導関数を求めると，

$$f'(x) = (\boxed{イウ}x + \boxed{エ})e^{-x}$$

となる。

このことから，$f(x)$は$x = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$で極値$\boxed{キ}e^{-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}} + \boxed{コ}$をとり，この極値は$\boxed{サ}$。

【$\boxed{サ}$の選択肢】

⓪ 極大値であるが$f(x)$の最大値ではない

① 極大値であり$f(x)$の最大値でもある

② 極小値であるが$f(x)$の最小値ではない

③ 極小値であり$f(x)$の最小値でもある

(3) tを正の実数とする。

曲線$y = f(x)$とx軸，y軸および直線$x = t$で囲まれる部分の面積を$S(t)$とする。

$S(t)$をtを用いて表すと，

$$S(t) = -(\boxed{シ}t + \boxed{ス})e^{-t} + \boxed{セ}t + \boxed{ソ}$$

であるから，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \boxed{タ}$$

となる。